



Università degli Studi di Trento

Facoltà di Ingegneria Ambiente e Territorio
Corso di Laurea Triennale in Idrologia

Relazione Pluviometria

Candidati:

Andrea Denaro

Matricola 157541

Teresa Paoloni

Matricola 160604

Relatore:

Riccardo Rigon

Correlatori:

Leonardo Perathoner

Marialaura Bancheri

Indice

1	Introduzione	2
2	Stazione Meteorologica	2
3	Raccolta Dati	2
4	Cenni di teoria	5
4.1	Metodo dei momenti	6
4.2	Metodo di massima verosimiglianza	6
4.3	Metodo dei minimi quadrati	6
4.4	Test di Pearson	7
5	Risultati	7
6	Fonti	16

Elenco delle figure

1	Mappa localizzazione stazione meteorologica.	2
2	Analisi preliminare dei dati.	3
3	Curve di Gumbel per 15 minuti	8
4	Curve di Gumbel per 30 minuti	8
5	Curve di Gumbel per 30 minuti	9
6	Curve di Gumbel per 1 ore	9
7	Curve di Gumbel per 3 ore	10
8	Curve di Gumbel per 6 ore	10
9	Curve di Gumbel per 12 ore	11
10	Curve di Gumbel per 24 ore	11
11	Curve di Gumbel migliori.	14
12	Densità di probabilità.	14
13	Linee di possibilità pluviometrica.	15
14	Linee possibilità pluviometrica, piano bi-logaritmico.	15

Elenco delle tabelle

1	Dati precipitazione massime annuali	4
2	Valore parametro a nei diversi metodi.	12
3	Valore parametro b nei diversi metodi.	12
4	Valori del χ^2	12
5	Metodi migliori.	13

1 Introduzione

La seguente relazione intende illustrare i procedimenti e i risultati relativi all'analisi pluviometrica della stazione meteorologica di Trento in località Laste (figura 1), mediante la costruzione delle curve di possibilità pluviometrica.

Il procedimento che permette di determinare tali curve prevede l'utilizzo dei valori di massima precipitazione annuale riferiti alla sopracitata stazione e valutati su intervalli di tempo rispettivamente di 15, 30, 45 minuti e 1, 3, 6, 12, 24 ore ed è costituito principalmente dalla fase di raccolta dati e successivamente dall'analisi statistica di essi tramite il software R (con l'interfaccia grafica Rstudio).

2 Stazione Meteorologica

La stazione meteorologica scelta, T0129, si trova a Trento (Laste) alla quota di 312 m s.l.m., alla latitudine di $46^{\circ} 04' 18.7''$ N e alla longitudine di $11^{\circ} 08' 08.4''$ E.

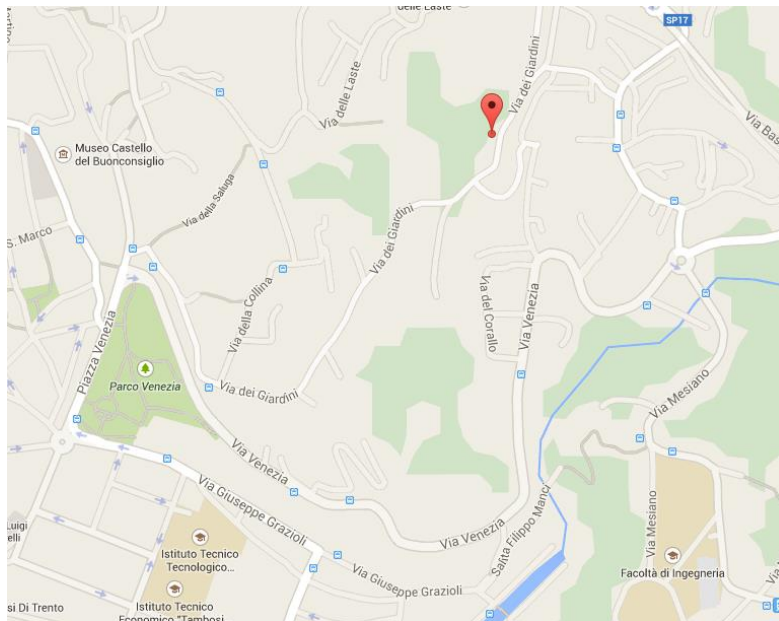


Figura 1: Mappa di localizzazione stazione meteorologica a Trento.

3 Raccolta Dati

I dati presenti in tabella 1, relativi alla stazione meteorologica scelta, sono tratti dal sistema di distribuzione informazioni di Meteotrentino. Si riferiscono come precedentemente detto ad intervalli temporali di 15, 30, 45

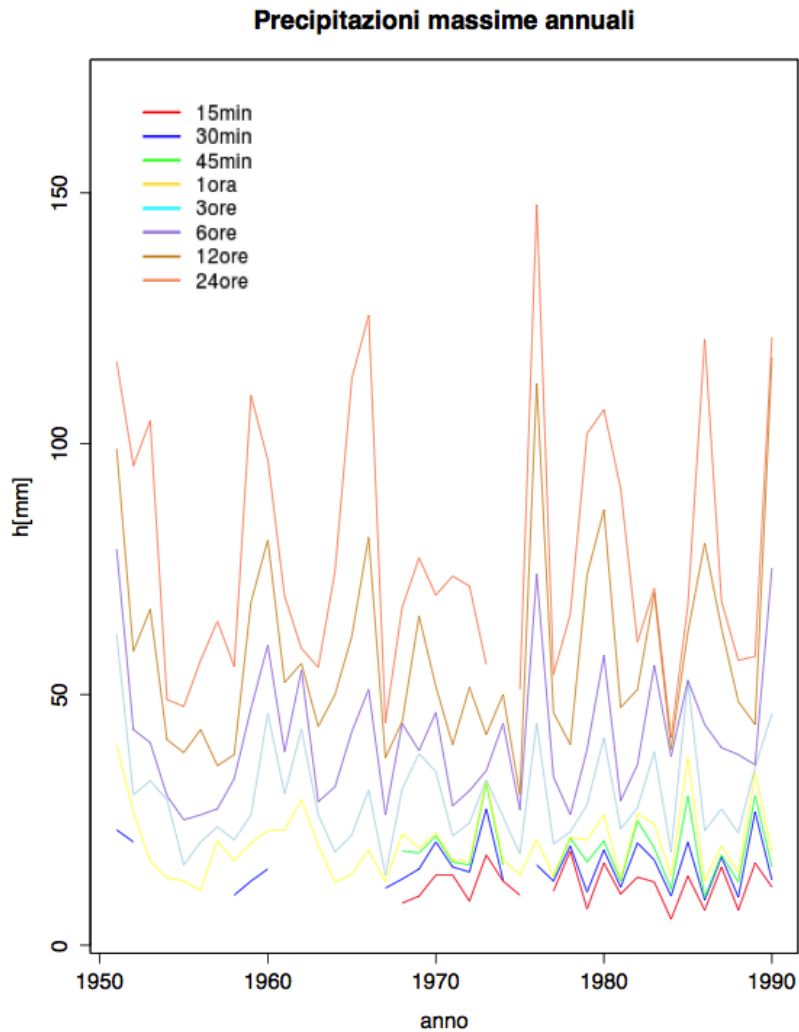


Figura 2: Analisi preliminare dei dati.

minuti e 1, 3, 6, 12, 24 ore e coprono un periodo di circa quarant'anni, dal 1951 al 1990.

Osservando i dati si può notare che nella colonna dei 15 e 45 minuti si hanno la maggior parte di dati mancanti e maggiormente concentrati nei quindici anni successivi l'inizio della raccolta delle informazioni.

Dal grafico in figura 2 si può notare come all'aumentare dell'intervallo temporale aumentino le altezze di precipitazione massime annuali, infatti le curve relative ai diversi anni non si intersecano in alcun punto. Una volta controllata la bontà dei dati è possibile procedere all'analisi dei dati tramite il programma di calcolo R.

Anno	15 [min]	30 [min]	45 [min]	1 [h]	3 [h]	6 [h]	12 [h]	24 [h]
1951	-	23.0	-	40.0	62.0	79.0	99.0	116.4
1952	-	20.6	-	26.6	30.0	43.0	58.6	95.6
1953	-	-	-	16.8	32.8	40.4	67.0	104.6
1954	-	7.6	-	13.4	29.0	29.8	41.0	49.0
1955	-	-	-	12.8	16.0	25.0	38.4	47.6
1956	-	-	-	11.0	20.6	26.0	43.0	56.8
1957	13.8	-	-	20.8	23.6	27.2	35.8	64.6
1958	-	10.0	-	16.8	21.0	33.2	38.0	55.6
1959	11.6	12.8	-	20.4	26.0	47.2	68.4	109.6
1960	-	15.2	-	22.8	46.2	59.8	80.8	96.8
1961	-	-	-	23.0	30.2	38.6	52.4	69.6
1962	-	19.6	26.0	29.0	43.0	54.8	56.2	59.2
1963	-	-	-	20.0	26.0	28.6	43.6	55.4
1964	-	11.0	-	12.6	18.6	31.6	50.0	74.6
1965	11.6	-	-	14.2	22.0	42.6	61.6	113.0
1966	-	-	-	19.0	31.0	51.0	81.4	125.6
1967	-	11.4	-	12.6	14.0	26.0	37.4	44.4
1968	8.4	13.2	18.8	22.2	31.2	44.2	44.6	67.4
1969	9.8	15.2	18.4	19.4	38.2	38.8	65.6	77.2
1970	14.0	20.6	21.8	22.4	34.6	46.4	51.6	69.8
1971	14.0	15.6	16.6	17.0	21.8	27.8	40.0	73.6
1972	8.8	14.6	16.0	16.8	24.4	30.8	51.4	71.6
1973	18.0	27.2	32.4	32.8	33.0	34.8	42.0	56.0
1974	12.8	13.0	16.0	17.0	25.6	44.2	50.0	-
1975	10.0	-	-	14.0	18.2	27.0	30.0	51.0
1976	-	16.0	-	21.0	44.2	74.0	112.0	147.6
1977	10.8	12.8	13.6	13.8	20.2	33.6	46.4	54.0
1978	18.8	19.8	21.4	21.6	22.6	26.0	40.0	66.0
1979	7.2	10.6	16.6	21.0	28.0	39.0	73.8	102.0
1980	16.4	19.0	20.8	26.0	41.4	57.8	86.8	106.8
1981	10.2	11.6	12.8	13.4	23.2	28.8	47.4	91.0
1982	13.6	20.4	24.8	26.2	27.4	36.0	51.0	60.4
1983	12.6	17.0	19.4	24.2	38.6	55.8	70.2	71.2
1984	5.2	9.8	11.2	13.8	18.6	37.6	39.2	41.4
1985	13.8	20.6	29.8	37.4	52.8	52.8	62.4	67.8
1986	7.0	9.0	9.6	12.8	22.8	44.0	80.2	120.8
1987	15.6	17.6	18.0	19.8	27.2	39.4	63.2	68.6
1988	7.0	9.6	12.6	14.4	22.4	38.0	48.6	56.8
1989	16.4	26.6	29.8	34.4	35.4	36.0	44.0	57.6
1990	11.6	13.0	15.6	18.4	46.2	75.2	117.2	121.2

Tabella 1: Valori di precipitazione annuale massima per vari intervalli temporali.

4 Cenni di teoria

Le curve di possibilità pluviometrica mettono in relazione l'altezza di precipitazione e la durata, consentendo di determinare le altezze di pioggia, associate ad eventi pluviometrici relativi ad una certa durata e tempo di ritorno, in un diagramma bi-logaritmico secondo la funzione:

$$h(t_p, T_r) = a(T_r)(t_p)^n \quad (1)$$

dove il secondo membro della (1) viene definita *legge di potenza*, i termini presenti, invece, rappresentano:

- h : l'altezza di precipitazione;
- t_p : durata di precipitazione;
- a, n : parametri dipendenti dalle caratteristiche pluviometriche, di cui solo il primo dipende dal tempo di ritorno, mentre $n \in [0, 1]$;
- T_r : tempo di ritorno, ovvero l'arco di tempo che intercorre tra due eventi di uguali caratteristiche, ottenuto dal rapporto tra il tempo di campionamento T , che corrisponde al prodotto tra il tempo di campionamento di ogni singola misura m e le misurazioni fatte n , e il numero di eventi estremi che si verificano nel medesimo intervallo l :

$$T_r = \frac{T}{l} = \frac{mn}{l} = \frac{m}{Fr(H > h^*)} = \frac{m}{1 - Fr(H \leq h^*)} = \frac{m}{1 - ECDF(h^*)}$$

- $Fr(H > h)$ corrisponde alla frequenza di misure maggiori ad una altezza di precipitazione h^* ;
- $Fr(H \leq h^*)$ è la frequenza di superamento della precipitazione assegnata h^* ;
- $ECDF$: empirical cumulative distribution function.

Per individuare le L.S.S.P. occorre determinare, per ogni durata, la corrispondenza tra quantili (assegnati tempi di ritorno) e altezza di precipitazione. Si vuole perciò cercare di interpolare i dati con una curva probabilistica, la distribuzione di probabilità candidata è quella di Gumbel:

$$P[H < h, a, b] = e^{-e^{-\frac{h-a}{b}}}$$

dove a è un parametro di posizione e b di forma. A questo punto occorre stimare questi parametri, per fare ciò si possono adottare tre diversi metodi:

- metodo dei momenti;
- metodo di massima verosimiglianza;
- metodo dei minimi quadrati.

Una volta trovati a e b tramite il test di Pearson si determina il metodo migliore, ovvero quello che interpola meglio i dati.

4.1 Metodo dei momenti

Consiste nell'imporre l'uguaglianza tra il momento campionario e la sua controparte non osservabile che caratterizza la popolazione. Applicato alla distribuzione di Gumbel significa eguagliare la media η_h e la varianza σ_h^2 caratteristici del campione con quelle della distribuzione, rispettivamente $E(x)$ e $Var(x)$:

$$E(x) = b\gamma + a$$

$$Var(x) = b^2 \frac{\pi^2}{6}$$

con γ costante di Eulero-Mascheroni pari a 0.57721.

Si giunge così al sistema di equazioni (2) in grado di fornire come soluzioni i parametri cercati a e b .

$$\begin{cases} \eta_h = b\gamma + a \\ \sigma_h^2 = b^2 \frac{\pi^2}{6} \end{cases} \quad (2)$$

4.2 Metodo di massima verosimiglianza

Questo metodo si basa sul massimizzare la funzione di verosimiglianza, descritta da:

$$P(a, b | \{h_1, \dots, h_n\}) = \frac{\prod_{i=1}^N P[h_i | a, b]}{p(\{h_1, \dots, h_n\})} p(a, b)$$

Si preferisce, però, semplificare i calcoli introducendo la funzione di *log-verosimiglianza*:

$$\log (P[\{h_1, \dots, h_n\}; a, b]) = \sum_{i=1}^N \log (P[h_i; a, b]) \quad (3)$$

Imponendo le derivate parziali della funzione (3) nulle rispetto ad a e b , si ottiene un sistema di due equazioni con altrettante incognite da cui si ricavano le stime dei parametri desiderati.

4.3 Metodo dei minimi quadrati

Questa tecnica permette di ricavare una funzione che si avvicini maggiormente ad un'interpolazione di un insieme di dati. La funzione trovata deve minimizzare la somma dei quadrati delle distanze dai punti dati.

Ad esempio, considerando i punti (x_i, y_i) rappresentanti nel piano cartesiano i dati di input, si vuole trovare una funzione $f(x)$ che approssimi la successione di punti data. Pertanto, si minimizza la distanza tra le due successioni, y_i e $f(x_i)$, ossia:

$$\sum_{i=1}^N (y_i - f(x_i))^2$$

Nel caso di distribuzione di Gumbel si intende determinare e poi minimizzare lo scarto quadratico medio tra le misure, di ECDF, e la probabilità di non superamento:

$$\delta^2 = \sum_{i=1}^n (F_i - P[H < h_i])^2$$

dove:

- F_i : frequenza della i -esima misura (ECDF);
- $P[H < h_i]$: frequenza di non superamento.

Dopo avere calcolato lo scarto quadratico medio è necessario minimizzarlo, poiché è una funzione che dipende dai parametri a e b della distribuzione di Gumbel, derivando rispetto a essi lo scarto e ponendo le due equazioni nulle si ricavano i parametri desiderati.

4.4 Test di Pearson

Una volta ottenute le tre coppie di valori, a e b , relative ad ogni metodo e per ogni intervallo temporale (15,30,45 minuti e 1, 3, 6, 12, 24 ore) si decide quale tra i metodi usati approssima meglio i parametri della distribuzione di Gumbel. Si deve applicare il Test di Pearson, secondo il quale, dopo aver suddiviso il campo di probabilità in k parti uguali, aver derivato una suddivisione del dominio e aver contato i dati presenti in ciascuna suddivisione, si calcola la funzione del χ^2 definita nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_{j=1}^k \frac{(Osservato - Atteso)^2}{Atteso} \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{(N_j - n(P[H < h_{j+1}] - P[H < h_j]))^2}{n(P[H < h_{j+1}] - P[H < h_j])} \end{aligned} \quad (4)$$

Il metodo migliore è quello che consente di avere un χ^2 minore (a parità di durata).

5 Risultati

A questo punto è possibile tramite il software di calcolo R applicare ciò che è stato descritto al capitolo 4 da un punto di vista teorico ai dati relativi alla stazione meteorologia scelta. Si riportano dalla figura 3 alla 10 le curve di Gumbel determinate con i metodi citati in precedenza relative ad ogni durata.

Nella tabella 2 sono riportati i valori del parametro a ottenuti con i diversi metodi, mentre in tabella 3 quelli relativi a b .

In tabella 4 vengono riportati i risultati dei valori risultanti dal calcolo del χ^2 con i metodi di massima verosimiglianza, momenti e quadrati.

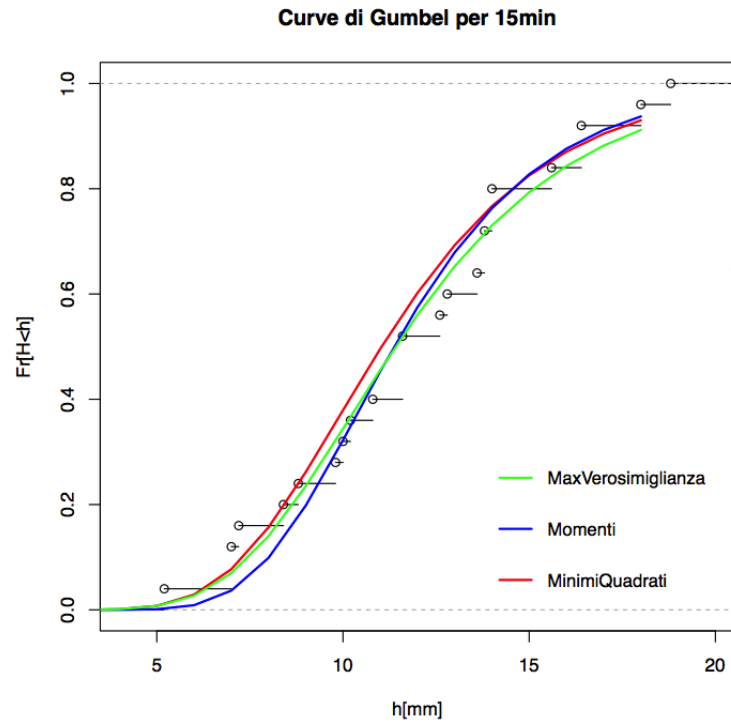


Figura 3: Curve di Gumbel ottenute con i diversi metodi, relative alla durata di 15 minuti

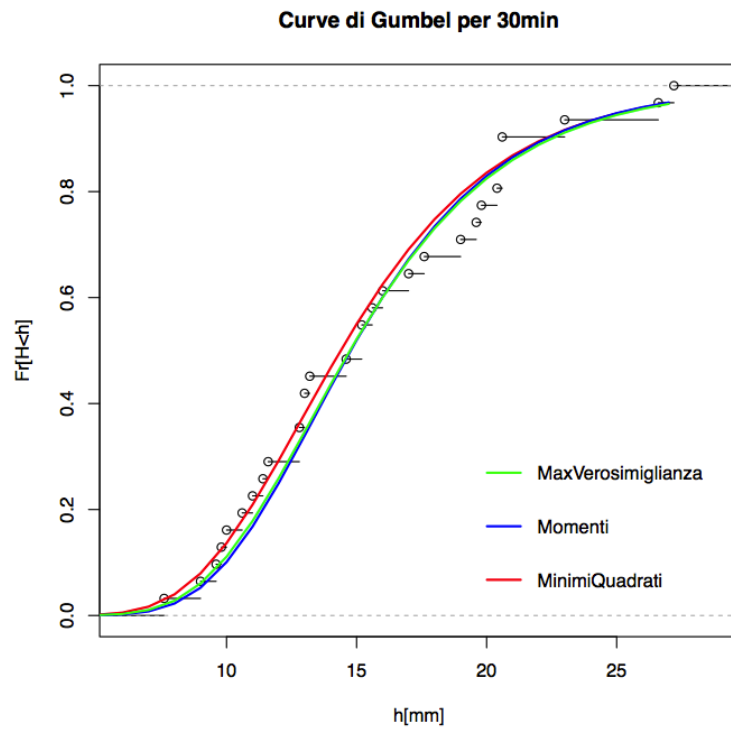


Figura 4: Curve di Gumbel ottenute con i diversi metodi, relative alla durata di 30 minuti.

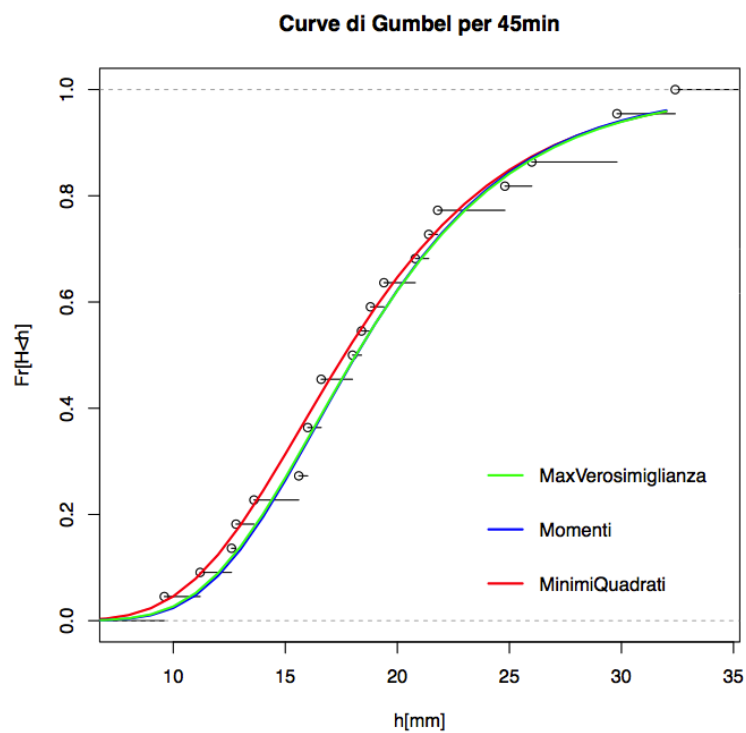


Figura 5: Curve di Gumbel ottenute con i diversi metodi, relative alla durata di 45 minuti.

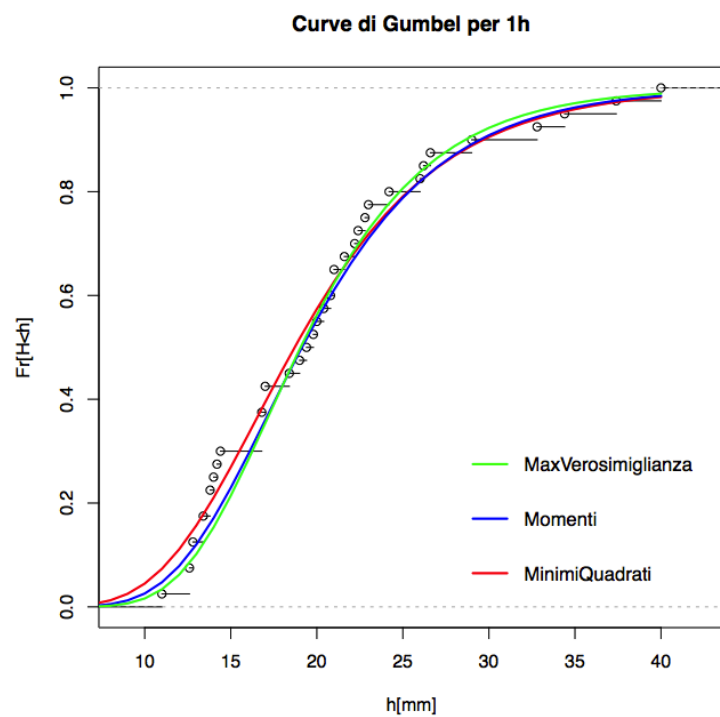


Figura 6: Curve di Gumbel ottenute con i diversi metodi, relative alla durata di 1 ora.

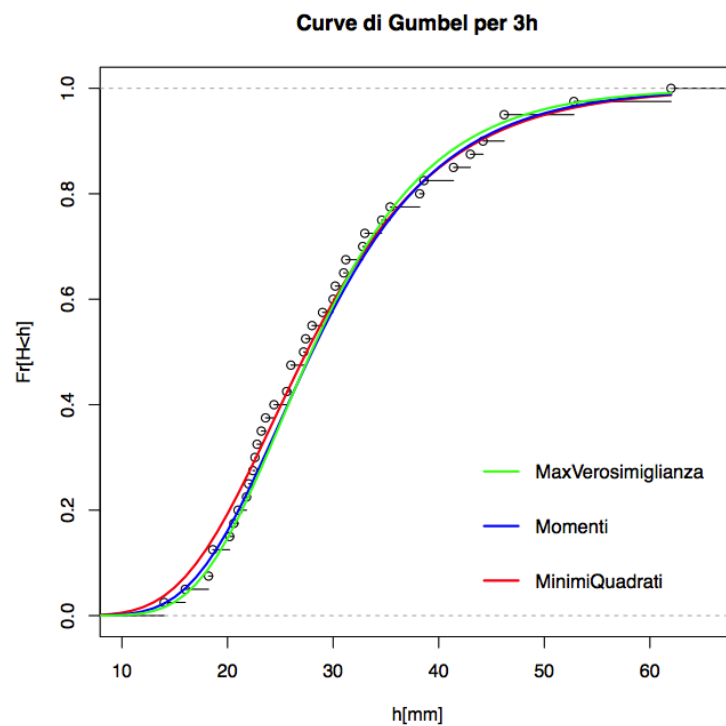


Figura 7: Curve di Gumbel ottenute con i diversi metodi, relative alla durata di 3 ore.

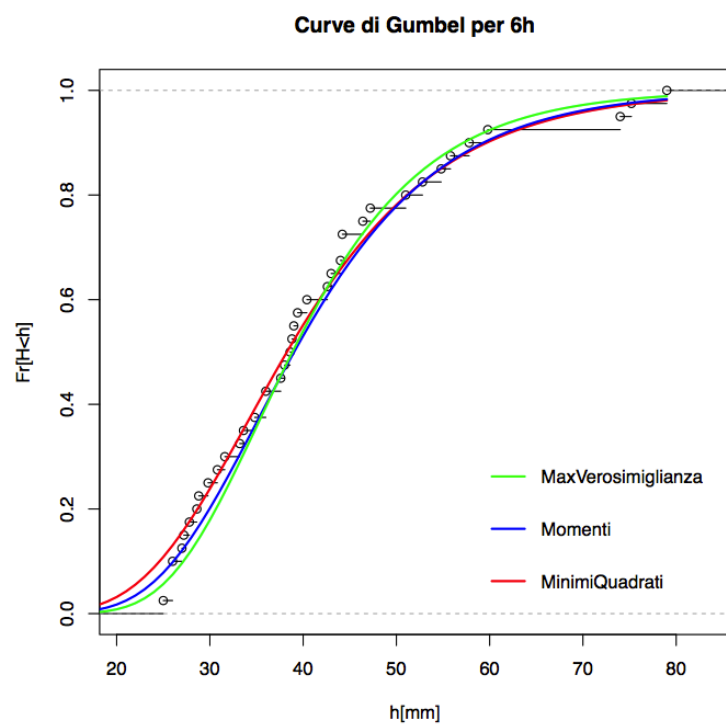


Figura 8: Curve di Gumbel ottenute con i diversi metodi, relative alla durata di 6 ore.

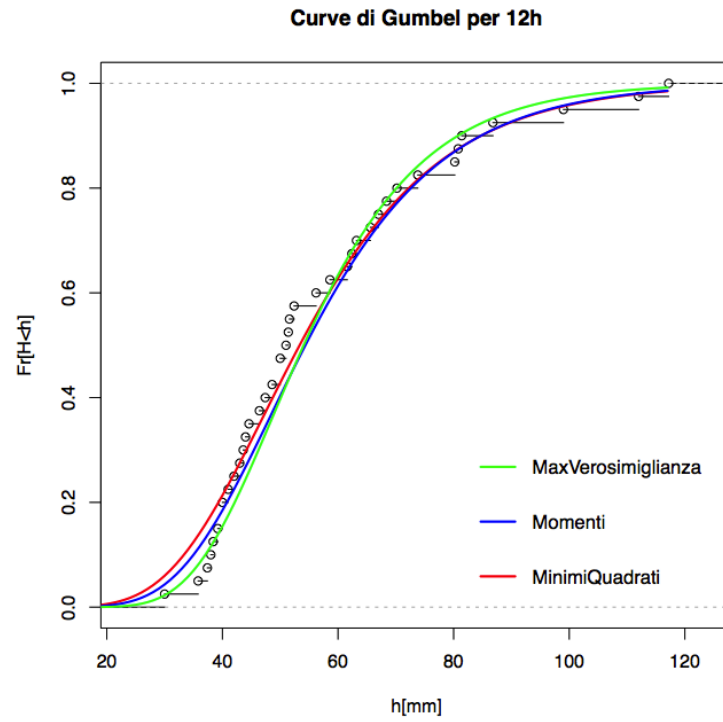


Figura 9: Curve di Gumbel ottenute con i diversi metodi, relative alla durata di 12 ore.

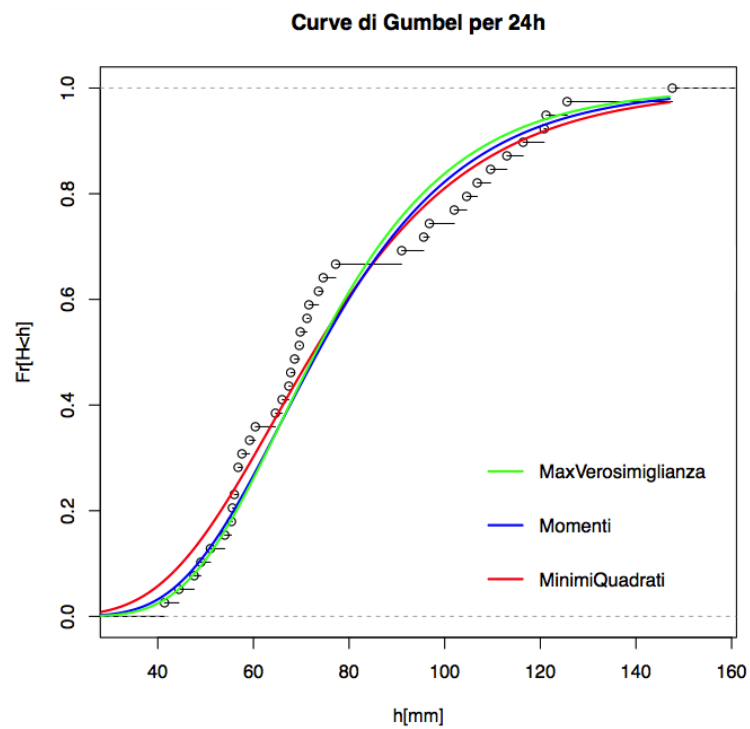


Figura 10: Curve di Gumbel ottenute con i diversi metodi, relative alla durata di 24 ore.

	MinimiQuadrati	Momenti	Verosimiglianza
15 min	9.904652	10.34670	10.21204
30 min	12.862225	13.31174	13.23800
45 min	15.756558	16.38329	16.34018
1 h	16.581698	17.12244	17.19568
3 h	24.315668	24.98091	25.06906
6 h	34.090417	35.07830	35.28337
12 h	47.251038	48.45172	48.87104
24 h	64.133790	65.82875	65.81553

Tabella 2: Valore parametro a nei diversi metodi.

	MinimiQuadrati	Momenti	Verosimiglianza
15 min	3.087013	2.794971	3.273175
30 min	4.156155	3.986670	4.106315
45 min	5.110908	4.848330	4.926221
1 h	5.810462	5.487665	5.076144
3 h	8.677215	8.262240	7.776859
6 h	11.369859	10.770154	9.733107
12 h	16.664376	16.117519	14.166813
24 h	22.890180	20.917358	19.711048

Tabella 3: Valore parametro b nei diversi metodi.

	MinimiQuadrati	Momenti	Verosimiglianza
15 min	1.600000	2.000000	1.200000
30 min	3.3548387	3.3548387	3.0322581
45 min	0.2727273	0.7272727	0.7272727
1 h	0.7500000	3.2500000	3.7500000
3 h	2.5000000	0.7500000	0.7500000
6 h	0.2500000	0.7500000	1.0000000
12 h	1.7500000	0.2500000	2.0000000
24 h	6.5128205	3.9487179	8.5641026

Tabella 4: Valori del χ^2 .

	Miglior metodo
15 min	MaxVerosimiglianza
30 min	MaxVerosimiglianza
45 min	MinimiQuadrati
1 h	MinimiQuadrati
3 h	Momenti
6 h	MinimiQuadrati
12 h	Momenti
24 h	Momenti

Tabella 5: Metodi migliori.

Tramite il test di Pearson si determinano i metodi migliori per le diverse durate (tabella 5).

Riportiamo per completezza i grafici relativi alle curve di Gumbel ottimali (figura 11), cioè ottenute utilizzando i parametri forniti dai metodi migliori per ogni durata, e relative alla densità di probabilità (figura 12):

Una volta tracciate le curve di Gumbel è sufficiente scegliere un tempo di ritorno (per esempio in questo caso si è scelto 10, 50, 100 anni) per determinare la rispettiva linea di segnalazione di possibilità pluviometrica (figura 13), viene riportato, inoltre, in figura 14 il grafico anche in un piano bi-logaritmico, nel quale vengono rappresentati anche i punti da interpolare.

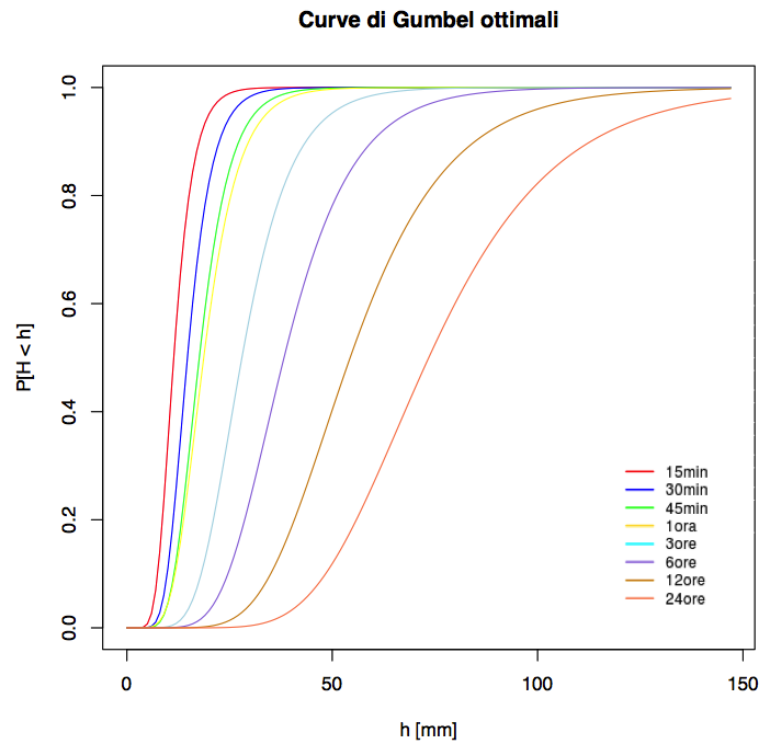


Figura 11: Curve di Gumbel migliori.

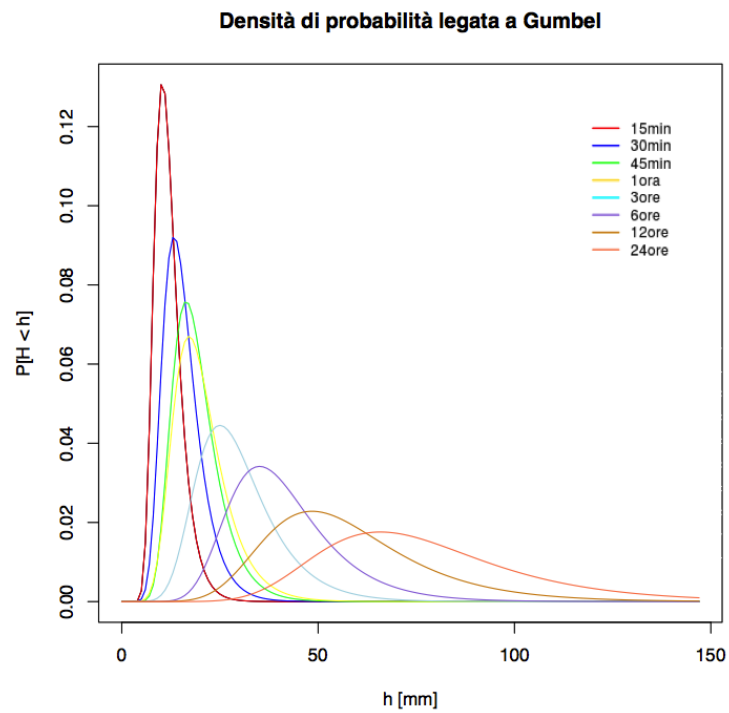


Figura 12: Densità di probabilità.

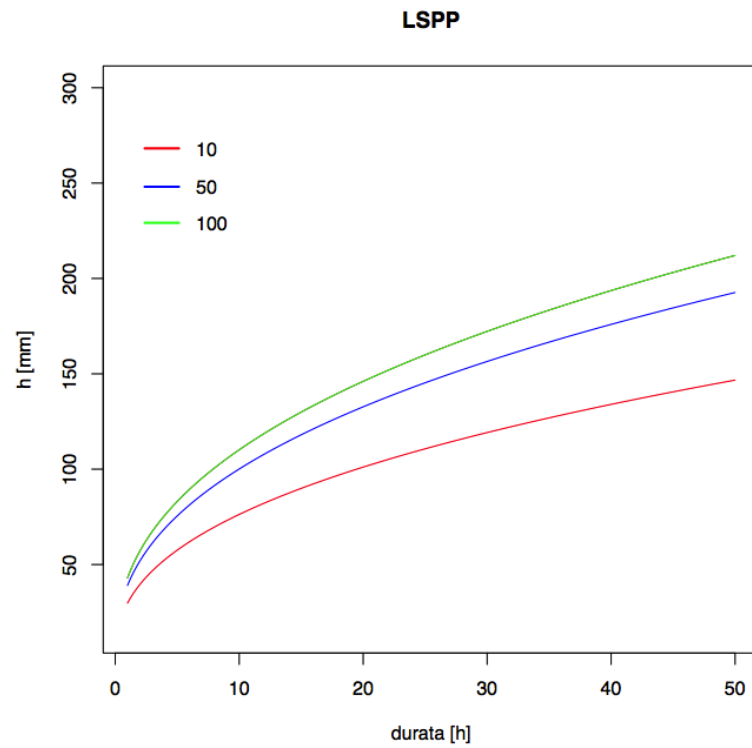


Figura 13: Linee di possibilità pluviometrica.

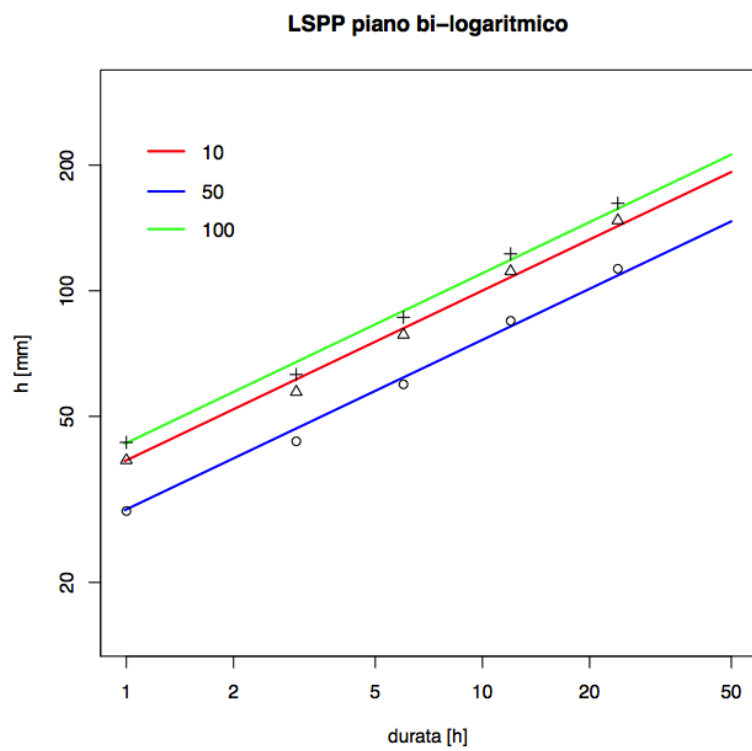


Figura 14: Linee possibilità pluviometrica, piano bi-logaritmico.

6 Fonti

I dati relativi alle altezze di precipitazione massima (tabella 1) sono stati presi in data 14/05/15 dall'archivio dati online di Meteotrentino all'indirizzo web *www.meteotrentino.it*.

Per la parte riguardante il capitolo 4 (cenni di teoria) si è fatto riferimento al materiale presente al sito *http://abouthydrology.blogspot.it*.

Per l'elaborazione dei dati e si è utilizzato il software open source R con interfaccia Rstudio scaricato da *http://www.rstudio.com/products/rstudio/download* per un utilizzo ottimale del programma si è fatto riferimento più volte al sito web *http://cran.r-project* per effettuare il download di pacchetti fondamentali per l'elaborazione dei dati e del file binario necessario all'installazione del software di calcolo.